Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

Физикалық техникалық факультет
Жылуфизикасы және техникалық физика кафедрасы

6 ДӘРІС

Дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістері. Тэйлор қатарына жіктеу әдісі. «Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалар

Дәріскер: А.К. Сариева, п.ғ.к., аға оқытушы

Дәріс мақсаты

Студенттерге дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістерін түсіндіру.
Тэйлор қатарына жіктеу әдісімен таныстыру. «Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалар туралы білімді қалыптастыру.

ЖОСПАР

1. **Тэйлор қатары деген не?**
2. **Тэйлор қатарына жіктеу әдісі.**
3. **Бірнеше айнымалылар бойынша Тейлор қатары.**
4. **«Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалар.**

Тэйлор қатары деген не?

Тэйлор қатары дегеніміз көпмүшенің туындысының шексіз қосындысына немесе басқа функцияға қатысты функцияның мәнін бекітілген нүктеге қатысты көрсету үшін қолданылатын қатар.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Яғни, функцияны көпмүшелікпен жуықтату үшін қолданылатын қатар.

f (x) = 4x функциясы үшін (a = 1 орталық нүктесінде) Тейлор формуласын пайдаланып жіктеуді табыңыз

Шешуі:

$f(x) = f(a) + [f'(a)'/1!](x-a) + [f''(a)/2!](x-a)^2 + [f'''(a)/3!](x-a)^3 + ... + f^{(n)}(x)/n!(x-a)^n$

Берілген функция, $f(x) = 4x$

С центром в точке $a = 1$

$f'(x) = 4$

$f''(x) = 0$

Енді **$f(x) = 4x$ Тейлор қатарына жіктейік:**

$f(x) = f(1) + [f'(1)'/1!](x-1) + [f''(1)/ 2!] (x-1)^2$

$f(x) = 4 + 4(x-1) + 0$

$f(x) = 4x$

Бірнеше айнымалылар бойынша Тейлор қатары.

Тейлор қатарын бірнеше айнымалылар функциясы үшін де ұсынуға болады. Бірнеше айнымалылар үшін Тейлор қатарының жалпы түрі

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \approx f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}\Big[(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (\Delta z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\Delta y \Delta z \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2\Delta z \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\Big]$$

Taylor Series in Several Variable

Тейлор қатары - функцияның мәнін табу үшін қолданылатын қатар. Бұл шексіз көпмүшелердің қосындысын қамтитын көпмүшелер немесе кез келген функция қатары.

Тейлор қатарының кеңеюіндегі әрбір келесі мүше алдыңғы мүшеге қарағанда үлкен көрсеткішке немесе жоғары дәрежелі мүшеге ие.

Функцияның шамамен мәнін табу үшін бастапқы төрт және бес мүшенің қосындысын аламыз, бірақ функцияның нақты мәнін алу үшін әрқашан көбірек мүшелерді ала аламыз.

«Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалар.

f(x) функциясын x_i нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктейік:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_i (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + \text{ÆÐÌ} \quad ,$$

мұндағы ЖРМ – жоғары ретті мүшелер.
Ықшамдау үшін төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad f_{i+1} = f(x_{i+1}), \quad f_i = f(x_i), \quad f_{i-1} = f(x_{i-1}).$$

Соңғы өрнекті жаңа белгілеулер арқылы жазайық:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ÆÐÌ} \quad . \qquad (2.2)$$

Барлық жоғары ретті мүшелерді былайша белгілеп алайық:

$$O(\Delta x^2) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}\bigg|_i \Delta x^3 + \text{ÆÐÌ} \quad ,$$

онда (2.2) өрнек мынадай түрге ие болады:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{df}{dx}\bigg|_i \Delta x + O(\Delta x^2)\,.$$

Мұндағы $O(\Delta x^2)$ белгілеуі келесі қосылғыштардың ең кіші реті екіге тең екендігін білдіреді; қалған қосылғыштардың реті жоғары болады. Осы жерден *i* нүктесіндегі бірінші туындыны табайық:

$$\frac{df}{dx}\bigg|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)\,.$$

O(Δx) **белгіленуі енді келесі қосылғыштардың ең кіші реті бірге тең екендігін білдіреді. Қатарға жіктегенде пайда болатын осы қосымшаны алып тастап, бірінші туынды үшін жуықталған өрнекті аламыз:**

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \qquad (2.3)$$

Бұл өрнек ***«алға» шекті–айырымды қатынасы*** **немесе бірінші туындының** ***оң жақты шекті-айырымды аппроксимациясы*** **деп аталады. (2.3) теңдеу бірінші туындыны** ***Δx*** **аппроксимация қателігімен аппроксимациялайды, яғни теңдеу** ***бірінші ретті дәлдікке ие.***

Туынды үшін шекті-айырымды өрнекті алу үшін *f(x)* функциясын x_{i-1} нүктесінде Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \qquad (2.4)$$
$$-\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ÆÐÌ}$$

Осыдан мынаны шығарып аламыз:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

немесе

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}. \qquad (2.5)$$

Бұл өрнек ***«артқа»*** *шекті–айырымды қатынасы* немесе бірінші туындының ***сол жақты*** *шекті-айырымды аппроксимациясы* деп аталады. (2.5) өрнегі (2.3) өрнек сияқты бірінші ретті дәлдікке ие.

Туынды үшін шекті-айырымды схеманы *f(x)* функциясын Тейлор қатарына жіктеу арқылы алудың тағы бір **үшінші әдісі** бар. Ол үшін (2.2) өрнегінен (2.4) өрнекті мүшелеп алып тастаймыз:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ÆÐÌ} \quad .$$

Осы жерден туындыны анықтаймыз:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^2 + \text{ÆÐÌ}$$

немесе

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\,.$$

Жоғарыдағы теңдеуден жуықталған өрнекті аламыз:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \qquad (2.6)$$

Бұл өрнек ***орталық*** *шекті-айырымды қатынас* деп аталады және (2.3) пен (2.5) өрнектерге қарағанда ***екінші*** *ретті дәлдікке ие*, өйткені, бұл өрнекті қорытып шығару барысында екінші ретті мүшелер ескерілмеді

Бақылау сұрақтары

1. Тэйлор қатары деген не?

2. Тэйлор қатарына жіктеу әдісінің мәнісі неде?

3. Бірнеше айнымалылар бойынша Тейлор қатарын мысалын келтіріңіз.

4. «Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалардың мәнісі.

ӘДЕБИЕТ

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - Спб.: Лань, 2009 - 672 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - Спб.: Лань, 2009 - 400с.
3. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2011- 364 с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учебное пособие для вузов. М.: Высшая Школа, 2002 - 153 с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы. Учебное пособие для вузов. М.: Дрофа, 2013 - 221 с.
6. Костомаров Д. П. Вводные лекции по численным методам. Москва: Логос, 2006 .- 184 с.
7. Волков Е. А. Численные методы. - Санкт-Петербург: Лань, 2009 .-256 с.
8. Исаков В. Н.Элементы численных методов : -Москва: Академия, 2012 .-192 с
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. Спб.: Лань, 2008 – 352 с.
10. Болегенова С.А. Численные методы теплофизики: учебное пособие. – Алматы: «Қазақ университеті», 2007. – 100 с.

Интернет-ресурстар:

1. *https://dxdy.ru ›*
2. *window.edu.ru*
3. *https://books.google.kz › book*